

ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОРОГИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ О КОНСОЛИ

А.А. Захаренко*

(Красноярский государственный университет)

Исследована динамическая потеря устойчивости консоли под действием поперечной нагрузки. Найдены точное решение нелинейного уравнения сильного изгиба, динамические пороги и формы консоли.

В основополагающей работе М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского [1] была рассмотрена динамическая потеря устойчивости для Эйлера стержня при продольном изгибе. После этой работы активно изучались ударные нагрузки на упругие системы и связанная с ними динамическая потеря устойчивости, приводящая к разрушениям. Изучалось в основном воздействие *вдоль* оси системы (балки, оболочки и т. п.). Влияние *поперечной* нагрузки на динамическую потерю устойчивости исследовалось недостаточно.

В 1995 г. в работах Ю.В.Захарова [2, 3] было показано, что задача о перемагничивании магнитного слоя с несимметричными граничными условиями аналогична задаче Эйлера об устойчивости упругого стержня. Были найдены статические и динамические пороги потери устойчивости магнитной системы, получены точные аналитические решения для форм распределения намагниченности на каждом пороге при перемагничивании в плоскости слоя вдоль и поперек направления магнитной анизотропии (для статических порогов см. также [4]). Для данной магнитной системы эти виды перемагничивания аналогичны продольной и поперечной сосредоточенной нагрузке на свободном конце упругого стержня, закрепленного на другом конце.

Для упругого стержня с указанными граничными условиями, находящегося под действием продольной силы P , пороги обычно находятся из решения уравнения равновесия в линейном приближении (см., например, [5]), и имеют вид

$$P_{th}^{(m)} = (2m - 1)^2 (\pi/2)^2 \alpha_r / L^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1)$$

где $\alpha_r = EJ$ – жесткость на изгиб, E – модуль Юнга, J – осевой момент инерции сечения, L – длина стержня. Статический порог при $m = 1$ равен Эйлеровой силе. Пороги при $m > 1$ были названы М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским *динамическими* порогами потери устойчивости, которые могут быть достигнуты при ударном приложении нагрузки, когда время нарастания импульса меньше времени релаксации системы.

Для конечных отклонений от положения равновесия уравнение продольного изгиба стержня становится нелинейным. Его решение после приведения к виду уравнения для нелинейного маятника получено в 1938 г. Х. Хайнзерлингом [5]. Выражения для всех порогов в линейном и нелинейном случае для упругой и магнитной систем совпадают.

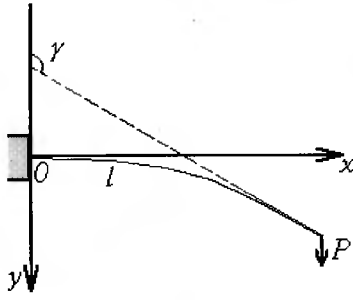
Таким образом, для *продольного* случая решены нелинейные уравнения и найдены статические и динамические пороги потери устойчивости для упругого стержня и магнитного слоя. Для *поперечного* случая такое подробное рассмотрение проведено для магнитной системы. Для упругого стержня рассматривалась в различных приближениях только форма при статической нагрузке. Здесь будут исследованы динамическая потеря устойчивости и форма упругого стержня – консоли под действием поперечной нагрузки.

Система координат показана на рисунке 1. У стержня кругового сечения, если нет внешних крутящих моментов, при изгибе кручения нет. Тогда задача об изгибе консоли сводится [6] к уравнению нелинейного маятника для угла γ как функции длины дуги l

$$d^2 \gamma / dl^2 + (P/\alpha_r) \sin \gamma = 0, \quad (2)$$

* научный руководитель – д.ф.-м.н., проф. Ю.В.Захаров

с граничными условиями $\gamma = \pi/2$ при $l = 0$, $\gamma' = 0$ при $l = L$. Эта задача сведена к квадратурам в [6]. Найдём решение в явном виде. Вводя безразмерную длину дуги $t = l / L$ и обозначение $q^2 = PL^2/\alpha_r$, запишем уравнение для $\gamma(t)$ в виде



$$d^2\gamma/dt^2 + q^2 \sin\gamma = 0, \quad (3)$$

с условиями $\gamma(0) = \pi/2$, $\gamma'(1) = 0$. Первое интегрирование даёт $d\gamma/dt = (C + 2q^2 \cos\gamma)^{1/2}$. Отсюда, вводя обозначения $\gamma/2 = \varphi_l$ и $k^2 = (C + 2q^2)/4q^2$, получаем

Рис. 1. Система координат

$$(1 - k^2 \sin^2 \varphi_l)^{1/2} d\varphi_l = kq dt, \quad (4)$$

откуда находим общее решение в виде неполного эллиптического интеграла первого рода

$$F(\varphi_l, k^{-1}) = kqt + D. \quad (5)$$

Это решение является общим и для продольного, и для поперечного случая, для каждого из которых постоянная D определяется из условия при $t = 0$ (для продольного $\gamma(0) = 0$). В нашем случае $\gamma(0) = \pi/2$. Воспользуемся линейным преобразованием [7] эллиптического интеграла $F(\varphi^*, k^*) = k F(\varphi, k)$, где $k^* = k^{-1}$, $\sin\varphi^* = k \sin\varphi$. Тогда из (5) имеем

$$k F[\arcsin(k^{-1} \sin\varphi_l), k] = kqt + D, \quad (6)$$

и когда при $t = 0$ угол $\varphi_l = \pi/4$ и $\sin\varphi_l = \sqrt{2}/2$, получаем

$$F[\arcsin(k^{-1} \sin\varphi_l), k] = qt + F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k]. \quad (7)$$

Введем обозначение $F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k] = F_l$ и проведем обращение эллиптического интеграла. Получим

$$k^{-1} \sin\varphi_l = \text{sn}(qt + F_l, k), \quad (8)$$

где sn обозначает эллиптический синус Якоби, k – модуль эллиптического синуса, который подлежит определению из условия на свободном конце. Вернемся к углу γ , имеем

$$\gamma = 2 \arcsin[k \text{sn}(qt + F_l, k)]. \quad (9)$$

Отсюда

$$d\gamma/dt = 2kq \text{cn}(qt + F_l, k), \quad (10)$$

где cn обозначает эллиптический косинус Якоби. Из условия $d\gamma/dt = 0$ при $t = 1$ следует уравнение $\text{cn}(qt + F_l, k) = 0$. Поскольку $\text{cnu} = 0$ при $u = (2m - 1)K(k)$, где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, находим спектр собственных значений P :

$$PL^2/\alpha_r = [(2m - 1)K(k) - F_l]^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Вводя Эйлерову силу $P_c = (\pi/2)^2 \alpha_r / L^2$, получаем уравнение для определения зависимости модуля k от нагрузки P

$$P/P_c = (2/\pi)^2 \{ (2m - 1)K(k) - F[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k] \}^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (12)$$

В таблице представлена зависимость модуля k от нагрузки P (обозначение $p = 2m - 1$).

Рассмотрим случай $m = 1$. Когда нагрузка $P = 0$ модуль $k^2 = 1/2$, при $P \rightarrow \infty$ модуль $k^2 \rightarrow 1$. Если направить силу в обратную сторону, $P \rightarrow -\infty$, то во всех выражениях достаточно сделать замену $k \rightarrow k'$, где дополнительный модуль k' определяется равенством $k^2 + k'^2 = 1$. При $P = 0$ модуль $k'^2 = 1/2$ и при $P \rightarrow -\infty$ модуль $k'^2 \rightarrow 1$. Отсюда следует, что отклонение стержня от положения равновесия начинается при любой малой силе $P \neq 0$, т.е. порога нет.

модуль k^2	P/P_c			на рис.2 кривая
	$p = 1$	$p = 3$	$p = 5$	
0.5	0	5.59	22.3	1
0.6	0.17	8.34	28.8	2
0.8	0.61	13.4	42.6	—
0.85	0.80	15.5	48.7	3
0.9	1.08	18.7	57.8	—
0.95	1.62	24.7	75.3	—
0.99	3.20	42.2	125	—
$1-10^{-5}$	15.9	171	492	4

Если $m > 1$, из (12) следует существование порогов при $k^2 = 1/2$

$$P_{th}^{(m)} = (m-1)^2 [(4/\pi)K(\sqrt{2}/2)]^2 P_c \approx 5.6 (m-1)^2 P_c, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

Статического порога (при $m = 1$) нет, пороги при $m > 1$ являются динамическими (см. в таблице строку при $k^2 = 0.5$).

Найдем форму стержня в общем случае. Координаты произвольной точки стержня

$$x = L \int \sin \gamma dt, \quad y = -L \int \cos \gamma dt. \quad (14)$$

Подставляя соотношение (11) в (9), получим для угла γ окончательное выражение

$$\gamma = 2 \arcsin\{(k \operatorname{sn}[(pK - F_1)t + F_1], k)\}, \quad p = 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

где $p = 2m - 1$ и $K = K(k)$. Далее введем обозначение $(pK - F_1)t + F_1 = u$ и будем писать эллиптические функции, опуская модуль k : $\operatorname{sn}(u, k) \equiv \operatorname{sn} u$ и аналогично остальные. Из выражения (15) имеем $\sin \gamma = 2k \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u$, $\cos \gamma = 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 u$, где $\operatorname{dn} u$ – дельта амплитуды Якоби.

Интегрируя в (14) с условиями $x = 0$ и $y = 0$ при $t = 0$, находим координаты x и y

$$x/L = [2k / (pK - F_1)] [(1 - 1/2k^2)^{1/2} - \operatorname{cn} u], \quad y/L = t - [2 / (pK - F_1)] [E(\operatorname{am} u, k) - E_1], \quad (16)$$

где $\operatorname{sn} u$ и $\operatorname{am} u$ – эллиптические косинус и амплитуда Якоби, $E(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл второго рода, введено обозначение $E[\arcsin(\sqrt{2}/2k), k] \equiv E_1$, и учтено, что $\operatorname{cn}(F_1, k) = \cos(\arcsin \sqrt{2}/2k) = (1 - 1/2k^2)^{1/2}$.

Уравнения (16) описывают в параметрическом виде ($0 \leq t \leq 1$) форму сильно изогнутой консоли под действием статической ($p = 1$) и динамических ($p = 3, 5, \dots$) нагрузок. Модуль k изменяется в пределах $1/2 \leq k^2 \leq 1$, задает общую кривизну консоли и определяется действующей силой P . При этом для каждого порога зависимость $k^2(P/P_c)$ определяется своим уравнением (12) при соответствующем $p = 2m - 1$.

Форма стержня при динамической нагрузке перестает быть монотонной кривой. Запишем характеризующие ее производные

$$dy/dx = (1 - 2d^2) / 2k s d, \quad d^2 y / dx^2 = (pK - F_1) c / 4Lk^2 s^3 d^3. \quad (17)$$

Здесь использованы обозначения $s = \operatorname{sn} u$, $d = \operatorname{dn} u$, $c = \operatorname{cn} u$. Точки максимума и минимума определяются уравнением $\operatorname{dn} u = \sqrt{2}/2$, точки перегиба – условием $\operatorname{sn} u = 0$. Здесь учтено, что $pK - F_1 > 0$ всегда, кроме как на статическом, нулевом пороге при $p = 1$ и $P = 0$; величина F_1 изменяется в пределах $K(\sqrt{2}/2) \geq F_1 \geq F(\pi/4, 1)$, т.е. $1.85 \geq F_1 \geq 0.88$. Число точек перегиба зависит от номера моды p . При $p = 1$ есть одна точка перегиба при $t = 1$, что совпадает с широко используемыми приближенными решениями в виде полиномов. При $p = 3$ есть две точки перегиба, которые при $1/2 \leq k^2 \leq 1$ лежат в пределах: $0 \leq t_1 \leq 1/3$, $t_2 = 1$. При $p = 5$ есть три точки перегиба: $0 \leq t_1 \leq 1/5$, $1/2 \leq t_2 \leq 3/5$, $t_3 = 1$. Координаты свободного конца консоли равны (при $t = 1$):

$$x/L = 2k(1 - 1/2k^2)^{1/2} / (pK - F_1), \quad y/L = 1 - 2(pE - E_1) / (pK - F_1), \quad (18)$$

где $E = E(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

Для статической моды $p = 1$ при нагрузке $P \rightarrow 0$ модуль $k^2 \rightarrow 1/2$, неполные интегралы $E(\varphi, k) \rightarrow E(k)$, $F(\varphi, k) \rightarrow K(k)$. Используя полученные в [3] разложения неполных интегралов при $k^2 \approx 1/2$, находим координаты свободного конца $y/L \approx 2k^2 - 1$, $x/L \approx (2 - 2k^2)^{1/2}$, и при $k^2 = 1/2$ получаем для этих координат значения $y/L = 0$, $x/L = 1$.

Для динамических мод ($p = 3, 5, \dots$) находим координаты свободного конца ($t = 1$)

$$x/L = 2k(1 - 1/2k^2)^{1/2} / (p - 1)K, \quad y/L = 1 - 2E / K, \quad (19)$$

и на порогах, при $k^2 = 1/2$, отсюда имеем

$$x/L = 0, \quad y/L \approx -0.46 \quad \text{при } t = 1 \quad (20)$$

независимо от номера моды.

Формы изогнутой консоли для трех мод – статической ($p = 1$) и динамических ($p = 3$ и $p = 5$) показаны на рис.2 для нескольких последовательно увеличивающихся значений приложенной силы.

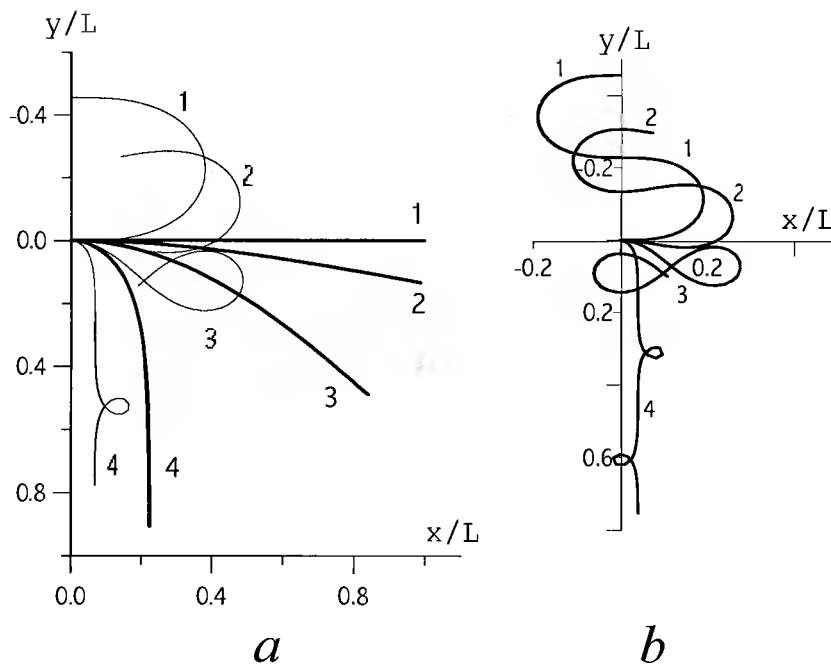


Рис. 2. Формы изогнутой консоли:

a – статическая мода ($p = 1$, жирная линия) и первая динамическая мода ($p = 3$, тонкая линия);

b – вторая динамическая мода ($p = 5$) при различных значениях нагрузки.

Модуль k^2 для всех мод имеет одинаковые значения при одинаковом номере кривой. Соответствующие значения P/P_c представлены в таблице.

Полученный результат для динамических мод имеет парадоксальный характер: под действием импульсной нагрузки со временем нарастания меньшим, чем время релаксации системы, стержень (консоль) отгибается *навстречу* действующей силе. Физическое объяснение такого метастабильного состояния автору неизвестно.

Отметим только несколько примеров, в которых были получены результаты аналогичного характера.

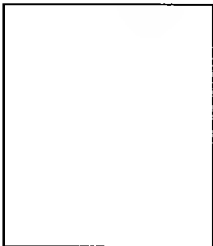
М.А. Лаврентьев и Б.В. Шабат описывают [8] следующий, по их выражению, парадоксальный эксперимент. В боковой поверхности наполненного водой толстостенного бака имеется круглое отверстие, затянутое тонкой мембраной из металла; в центре бака производят взрывы; после взрыва прогнутая наружу мембрана заменяется. При увеличении заряда прогиб мембраны увеличивался до некоторой величины, а при дальнейшем увеличении заряда мембрана оказывалась прогнутой *навстречу* взрыву. Теоретического объяснения этого явления, насколько известно, нет.

В работе Ю.В.Захарова по перемагничиванию магнитной системы [3] в слое поперек анизотропии аналогичный расчет показал, что намагниченность в слое после динамического порога разворачивается от равновесного положения *против* поля по всей толщине слоя. Здесь необходимо проведение эксперимента по импульсному перемагничиванию со временем нарастания импульса порядка единиц наносекунд.

Возможность появления описанных здесь сильных изгибов консолей, *встречных* к направлению сильного удара, может быть потенциально весьма опасной в условиях катастроф (землетрясений, ураганов, взрывов), так как строительные конструкции могут при этом работать на изгиб в направлении, противоположном расчетному. "Верх" и "низ" консолей или балок могут поменяться местами, что может привести к существенному увеличению числа разломов и более тяжким разрушениям.

Литература

1. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР – 1949. – Т. 64. №6. – С. 779-782.
2. Захаров Ю.В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании // ДАН – 1995. – Т. 344. №3. – С. 328-332.
3. Захаров Ю.В. Статическая и динамическая потеря устойчивости ферромагнитного слоя при перемагничивании. Пороговые поля и частоты магнитного резонанса // Препринт №758Ф. – Красноярск: Ин-т физики СО РАН, Ин-т биофизики СО РАН – 1995 – С. 40.
4. Zakharov Yu., Ignatchenko V.A. Magnetic resonanse in films on antiferromagnetic substrate // Czech. J. Phys. – 1971. – V. B21. №4-5. – P. 482-485.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Физматгиз, 1968.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1987.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Физматгиз, 1967.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Физматгиз, 1977.



Захаренко Алексей Анатольевич, год рождения 1974, студент-дипломник 6 курса КГУ (Межвузовское инженерно-физическое отделение), научные интересы – физика твердого тела, проблемы устойчивости систем.